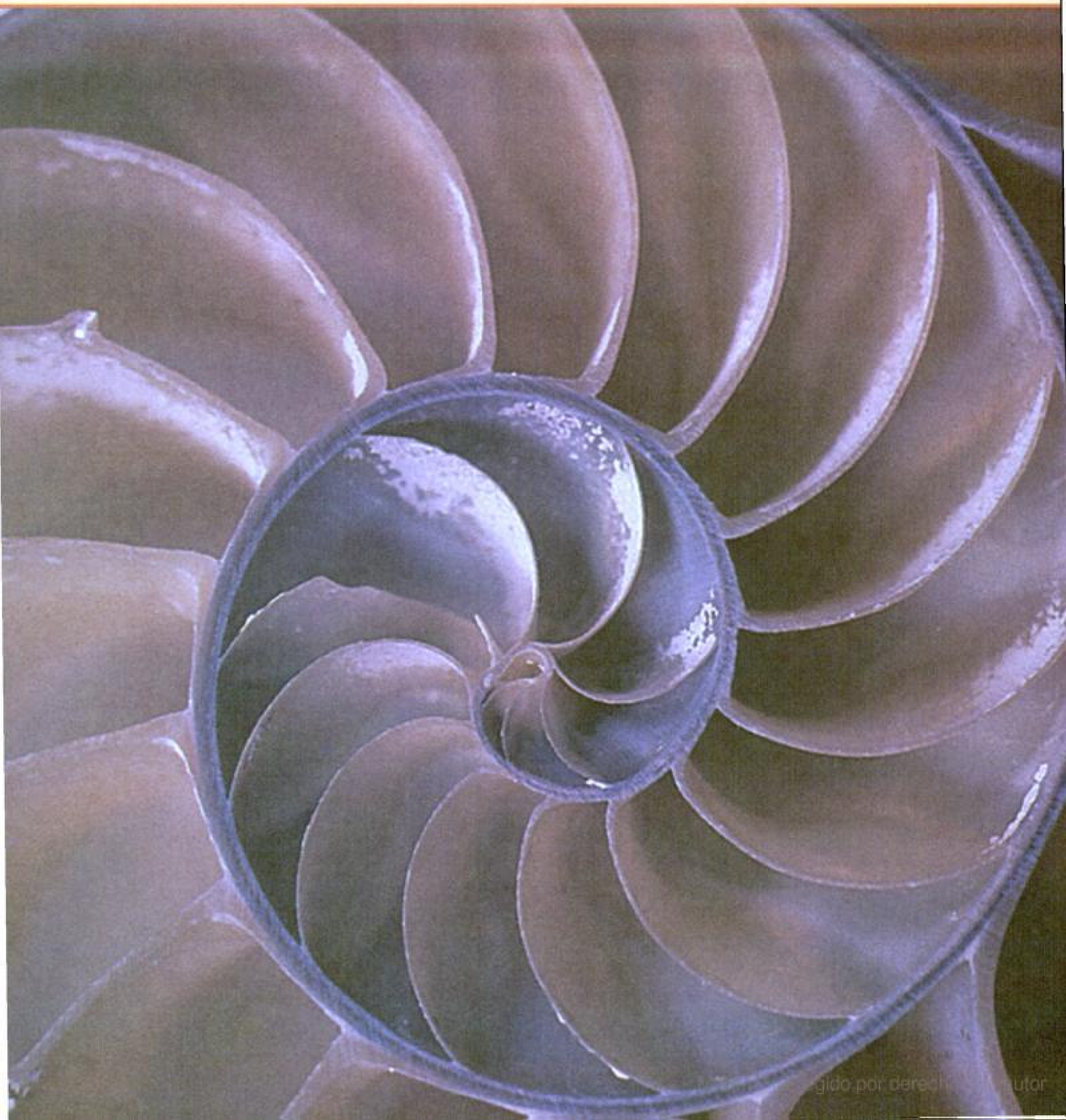
Capítulo 11 del libro Precálculo: matemáticas para el cálculo[1]

[1] WATSON, Saleem, et al. Precálculo: matemáticas para el cálculo/James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson; revisión técnica Héctor Vidaurri, Alejandro Alfaro.

11 Sucesiones y series

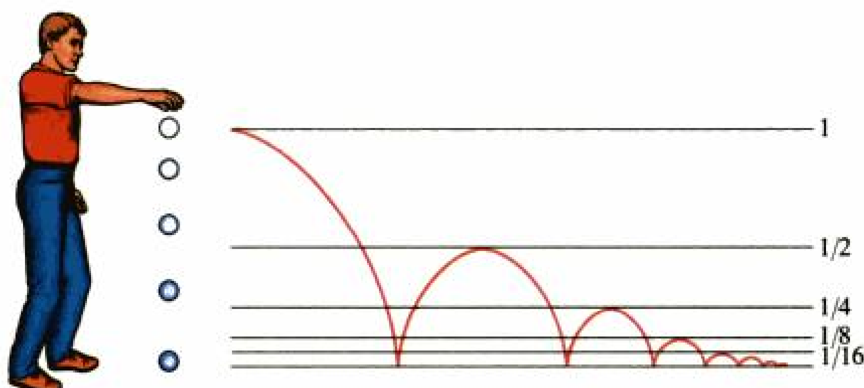


Esquema del capítulo

En este capítulo estudiamos las sucesiones y series de números. En pocas palabras, una sucesión es una lista de números escritos en un orden específico. Los números de la sucesión se escriben con frecuencia como $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Los puntos significan que la lista continúa por siempre. Un ejemplo sencillo es la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{array}$$

Las sucesiones se presentan en muchas situaciones del mundo cotidiano. Por ejemplo, si usted deposita una cantidad de dinero en una cuenta que genera intereses, el interés ganado cada mes genera una sucesión. Si usted lanza una pelota y la deja rebotar, la altura que alcanza la pelota en cada rebote sucesivo es una sucesión. Una sucesión interesante está oculta en la estructura interna de la concha de un nautilo.



Podemos describir el patrón de la sucesión mostrada mediante la *fórmula*:

$$a_n = 5n$$

Usted podría haber pensado una manera distinta de describir el patrón, como, "pasa de un número al otro sumando 5". Esta manera natural de describir la sucesión se expresa mediante la *fórmula recursiva*:

$$a_n = a_{n-1} + 5$$

empezando con $a_1 = 5$. Trate de sustituir $n = 1, 2, 3, \ldots$ en cada una de estas fórmulas para poder observar la manera en que se generan los números en la sucesión.

Susan Van Etten/PhotoEdit

Con frecuencia, usamos sucesiones para modelar fenómenos del mundo real, por ejemplo, los pagos mensuales sobre la hipoteca es una sucesión. Exploramos muchas otras aplicaciones de las sucesiones en este capítulo y en el *Enfoque en el modelado* de la página 874.

11.1 Sucesiones y notación de suma

Muchos procesos del mundo cotidiano generan listas de números. Por ejemplo, el balance en una cuenta bancaria al final de cada mes forma una lista de números cuando se rastrea en el tiempo. Los matemáticos llaman a estas listas *sucesiones*. En esta sección estudiamos las sucesiones y sus aplicaciones.

Sucesiones

Una *sucesión* es un conjunto de números escritos en un orden específico:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 se llama *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Puesto que para cada número natural n hay un número correspondiente a_n, podemos definir a una sucesión como una función.

Definición de una sucesión

Una **sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto de números naturales. Los valores $f(1), f(2), f(3), \ldots$ son los **términos** de la sucesión.

Por lo regular se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

He aquí un ejemplo sencillo de una sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Los puntos indican que la sucesión continúa indefinidamente. Se puede escribir una sucesión en esta manera cuando es evidente cuáles son los términos siguientes. Esta sucesión está formada por números pares. Para ser más exactos, es necesario especificar un procedimiento para hallar *todos* los términos de la sucesión. Esto se puede efectuar dando una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión. En este caso,

Otra manera de expresar esta sucesión es usar la notación de función:

$$a(n) = 2n$$

de modo que $a(1) = 2$, $a(2) = 4$, $a(3) = 6, \ldots$

$$a_n = 2n$$

y la sucesión se puede expresar como

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \ldots, \quad 2n, \quad \ldots$$



Observe cómo la fórmula $a_n = 2n$ da todos los términos de la sucesión. Por ejemplo, al sustituir 1, 2, 3 y 4 en n tenemos los primeros cuatro términos:

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Para encontrar el 103o. término de esta sucesión, usamos $n = 103$ para obtener

$$a_{103} = 2 \cdot 103 = 206$$

Ejemplo 1 Cálculo de los términos de una sucesión

Calcular los primeros cinco términos y el centésimo término de la sucesión definida por cada fórmula.

a) $a_n = 2n - 1$ b) $c_n = n^2 - 1$

c) $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ d) $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

Solución Para determinar los primeros cinco términos se sustituye $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 en la fórmula en el lugar del n-ésimo término. Para determinar el centésimo término, se sustituye $n = 100$. Así se obtiene lo siguiente:

n-ésimo término	Primeros cinco términos	Centésimo término
a) $2n - 1$	1, 3, 5, 7, 9	199
b) $n^2 - 1$	0, 3, 8, 15, 24	9999
c) $\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$	$\dfrac{100}{101}$
d) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{1}{2^{100}}$

■

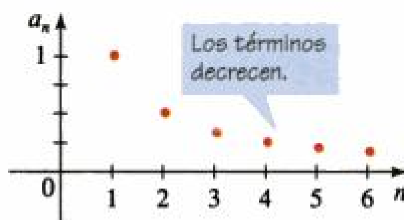


Figura 1

En el ejemplo 1d) la presencia de $(-1)^n$ en la sucesión tiene el efecto de hacer que los términos sucesivos sean alternadamente negativos y positivos.

Con frecuencia es útil esbozar una sucesión dibujando una gráfica. Puesto que una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales, podemos dibujar la gráfica en el plano cartesiano. Por ejemplo, la gráfica de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

se muestra en la figura 1. Compárela con la gráfica de

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

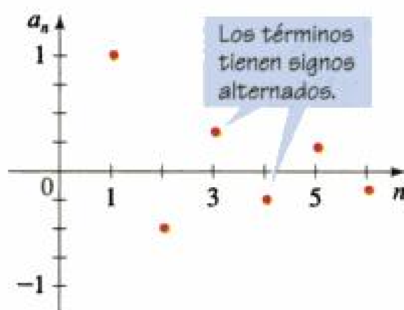
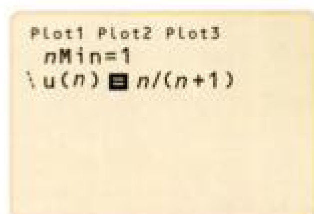


Figura 2

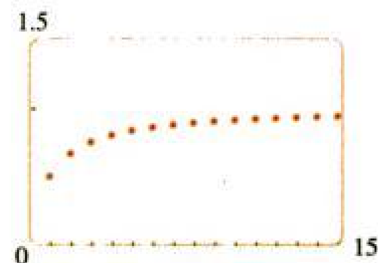
mostrada en la figura 2. La gráfica de cada una de las sucesiones consiste en puntos aislados que *no* están unidos.

Las calculadoras que grafican son útiles para analizar las sucesiones. Para trabajar con sucesiones en la TI-83, es necesario poner la calculadora en modo `Seq` como en

la figura 3a). Si se ingresa la sucesión $u(n) = n/(n + 1)$ del ejemplo 1c), podemos ver los términos usando el comando TABLE como se muestra en la figura 3b). También se pueden graficar las sucesiones como se ilustra en la figura 3c).



n	u(n)
1	.5
2	.66667
3	.75
4	.8
5	.83333
6	.85714
7	.875
n=1	



a) b) c)

Figura 3
$u(n) = n/(n + 1)$

Encontrar patrones es una parte importante de las matemáticas. Considere una sucesión que empieza

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

No todas las sucesiones se pueden definir mediante una fórmula. Por ejemplo, no hay fórmula conocida para la sucesión de números primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

¿Puede detectar un patrón en estos números? En otras palabras, ¿puede definir una sucesión cuyos primeros cuatro términos sean estos números? La respuesta a esta pregunta parece fácil; estos números son los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4. Por consiguiente, la sucesión que estamos buscando se define mediante $a_n = n^2$. No obstante, esta no es la *única* sucesión cuyos primeros cuatro términos son 1, 4, 9, 16. En otras palabras, la respuesta a nuestro problema no es única (véase el ejercicio 78). En el ejemplo siguiente interesa encontrar una sucesión *obvia* cuyos primeros términos concuerden con los términos dados.

Números primos grandes

La búsqueda de números primos grandes fascina a muchas personas. En el momento en que esto se escribió, el número primo más grande conocido era

$$2^{25\,964\,951} - 1$$

Fue descubierto en 2005 por Martin Nowak, un cirujano oftalmólogo y aficionado a las matemáticas, de Michelfeld, Alemania. Utilizó para ello una computadora Pentium 4 de 2.4 GHz. En la notación decimal este número contiene 7 816 230 dígitos. Si se escribiera completo ocuparía casi el doble de páginas de este libro. Nowak estuvo trabajando con un grupo de Internet grande conocido como GIMPS (la Great Internet Mersenne Prime Search, la Gran Búsqueda por Internet de los primos Mersenne). Los números de la forma $2^p - 1$, donde p es primo, se llaman números Mersenne, y en ellos se comprueba con más facilidad su calidad de primos que en otros. Ésta es la razón por la cual los primos conocidos más grandes son de esta forma.

Ejemplo 2 Determinación del n-ésimo término de una sucesión

Determine el n-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se proporcionan.

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$ b) $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

Solución

a) Se puede observar que los numeradores de estas fracciones son los números impares y los denominadores son los números pares. Los números pares son de la forma $2n$, y los números impares son de la forma $2n - 1$ (un número impar difiere de un número par en 1). Entonces, la sucesión que tienen estos números en sus primeros cuatro términos está representada por

$$a_n = \frac{2n - 1}{2n}$$

b) Estos números son potencias de 2 y se alternan de signo, por lo que una sucesión que concuerda con estos términos es

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

Debe comprobar que estas fórmulas generan en verdad los términos dados. ■

Sucesiones definidas recursivamente

Algunas sucesiones carecen de fórmulas que se definen tan fácilmente como las del ejemplo anterior. El n-ésimo término de una sucesión podría depender de algunos o de todos los términos que lo preceden. Una sucesión definida de esta manera se llama **recursiva**. He aquí dos ejemplos.

Eratóstenes (alrededor de 276 a 195 a.C.) fue un geógrafo, matemático y astrónomo griego muy reconocido. Calculó exactamente la circunferencia de la Tierra mediante un método muy ingenioso (véase el ejercicio 72, página 476). Sin embargo, es más famoso por su método para encontrar números primos, conocido en la actualidad como la *criba de Eratóstenes*. El método consiste en hacer una lista de enteros, empezando por el 2, el primer número primo, y luego tachar todos los múltiplos de 2, los cuales no son primos. El siguiente número que queda en la lista es el 3, el segundo primo, de modo que de nuevo se tachan todos los múltiplos de éste. El siguiente número es el 5, el tercer número primo, y se tachan todos sus múltiplos, y así sucesivamente. De esta manera, todos los números que no son primos están tachados, y los números que quedan son los primos.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ejemplo 3 Determinación de los términos de una sucesión definida recursivamente



Determine los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$ y

$$a_n = 3(a_{n-1} + 2)$$

Solución La fórmula que define esta sucesión es recursiva. Permite encontrar el n-ésimo término a_n si se conoce el término precedente a_{n-1}. Por lo tanto, se puede calcular el segundo término a partir del primero, el tercero a partir del segundo, el cuarto término a partir del tercero y así sucesivamente. Puesto que ya tenemos el primer término $a_1 = 1$, se puede continuar como sigue

$$a_2 = 3(a_1 + 2) = 3(1 + 2) = 9$$
$$a_3 = 3(a_2 + 2) = 3(9 + 2) = 33$$
$$a_4 = 3(a_3 + 2) = 3(33 + 2) = 105$$
$$a_5 = 3(a_4 + 2) = 3(105 + 2) = 321$$

Por lo tanto, los primeros cinco términos de esta sucesión son

$$1, 9, 33, 105, 321, \ldots$$

■

Hay que observar que con objeto de determinar el vigésimo término de la sucesión del ejemplo 3, es necesario primero encontrar los 19 anteriores. Esto se efectúa con más facilidad mediante una calculadora para graficar. En la figura 4a) se ilustra cómo introducir los datos de esta sucesión en la calculadora TI-83. A partir de la figura 4b) se puede observar que el vigésimo término de la sucesión es $a_{20} = 4\,649\,045\,865$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
 nMin=1
\u(n)=3(u(n-1)+2)
 u(nMin)={1}
```

a)

```
u(20)
            4649045865
```

b)

Figura 4

$u(n) = 3(u(n-1) + 2)$, $u(1) = 1$

Ejemplo 4 La sucesión de Fibonacci



Calcule los primeros 11 términos de la sucesión definida recursivamente por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Solución Para calcular F_n necesitamos encontrar los dos términos precedentes F_{n-1} y F_{n-2}. Puesto que ya conocemos F_1 y F_2, continuamos como sigue.

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$



Fibonacci (1175-1250) nació en Pisa, Italia, y se educó en el norte de África. Viajó por toda la zona del Mediterráneo y aprendió varios métodos que se usaban entonces para escribir números. Cuando regresó a Pisa en 1202, Fibonacci se declaró en favor del uso del sistema decimal hindú-arábigo, el que usamos en la actualidad, en lugar del sistema numérico romano que se usaba en Europa en esa época. Su obra más famosa, *Liber Abaci*, explica en detalle las ventajas de los números hindú-arábigos. En efecto, la multiplicación y la división eran tan complicadas usando los números romanos que se requería un grado universitario para alcanzar esas habilidades. Es interesante hacer notar que en 1299 la ciudad de Florencia declaró fuera de la ley el uso del sistema decimal para comerciantes y negocios, y pedía que los números se escribieran en caracteres romanos o en palabras. Uno sólo puede especular acerca de la razón de esta ley.

Es evidente lo que sucede aquí. Cada término es simplemente la suma de los dos términos que lo preceden, por lo que con toda facilidad se pueden escribir tantos términos como queramos. He aquí los primeros 11 términos.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$ ■

La sucesión del ejemplo 4 se denomina **sucesión de Fibonacci**, nombrada así en honor del matemático italiano del siglo XIII que la utilizó para resolver un problema relacionado con la reproducción de los conejos (véase el ejercicio 77). La sucesión también se presenta en numerosas situaciones en la naturaleza (véanse las figuras 5 y 6). En efecto, tantos fenómenos se comportan según la sucesión de Fibonacci que una revista sobre matemáticas, el *Fibonacci Quarterly* sólo se dedica a las propiedades de esta sucesión.

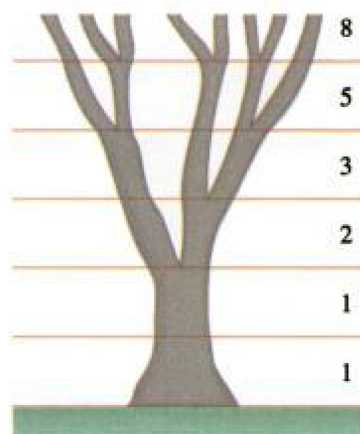
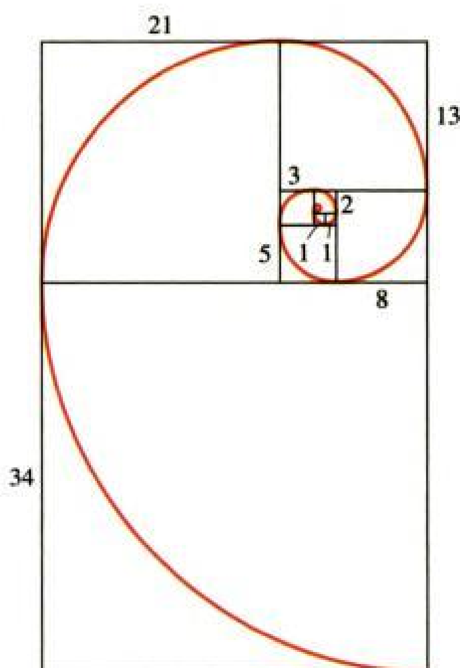
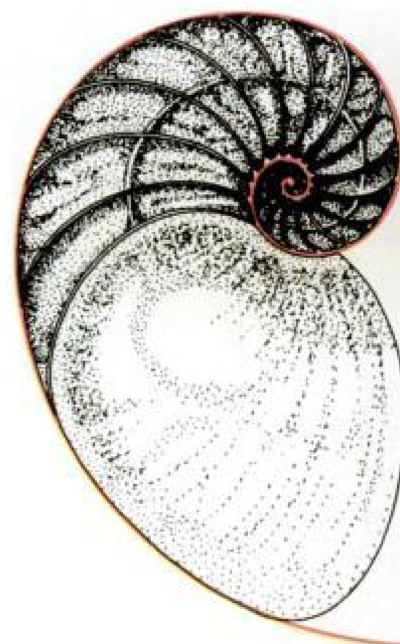


Figura 5

La sucesión de Fibonacci en el crecimiento de las ramas de un árbol



Espiral de Fibonacci



Concha de nautilo

Figura 6

Sumas parciales de una sucesión

En el cálculo infinitesimal, con frecuencia nos interesamos en la suma de los términos de una sucesión. Esto da origen a la definición siguiente.

Sumas parciales de una sucesión

En el caso de la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

las **sumas parciales** son

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

S_1 se llama **primera suma parcial**, S_2 es la **segunda suma parcial** y así sucesivamente. S_n se denomina ***n*-ésima suma parcial**. La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ se denomina **sucesión de sumas parciales**.

Ejemplo 5 Cálculo de las sumas parciales de una sucesión

Calcule las primeras cuatro sumas parciales y la *n*-ésima suma parcial de la sucesión dada por $a_n = 1/2^n$.

Solución Los términos de la sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Las primeras cuatro sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

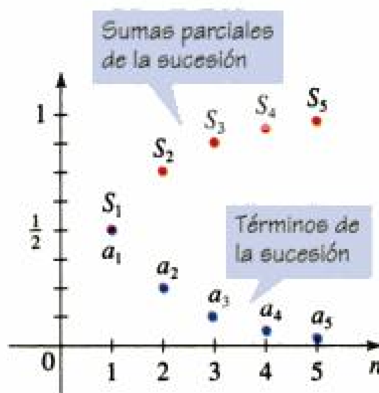


Figura 7
Gráfica de la sucesión a_n y la sucesión de las sumas parciales S_n

Hay que observar que en el valor de cada suma parcial el denominador es una potencia de 2 y el numerador una unidad menor que el denominador. En general, la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Los primeros cinco términos de a_n y S_n se grafican en la figura 7. ■

Ejemplo 6 Cálculo de las sumas parciales de una sucesión



Determine las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Solución Las primeras cuatro sumas parciales son

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$$

¿Detecta un patrón aquí? Claro. La n-ésima suma parcial es

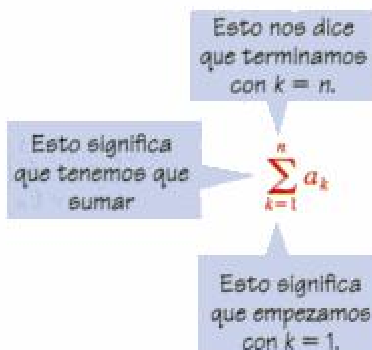
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$ ■

Notación sigma

Dada una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

se puede escribir la suma de los primeros n términos usando la **notación de suma** o **notación sigma**. Esta notación toma su nombre de la letra griega mayúscula Σ, que equivale a la S de "suma". La notación sigma se usa como sigue:



$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

El lado izquierdo de la expresión quiere decir "La suma de a_k desde que $k = 1$ hasta $k = n$". La letra k se llama **índice de suma** o **variable de la suma**, y la idea es reemplazar k de la expresión después de sigma por los enteros 1, 2, 3, . . . , n, y sumar las expresiones resultantes, para llegar a obtener el lado derecho de la ecuación.

Las siguientes propiedades de las sumas son consecuencias naturales de las propiedades de los números reales.

Propiedades de las sumas

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ sucesiones. Entonces para todo entero positivo n y cualquier número real c, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

■ **Demostración** Para demostrar la propiedad 1, escribimos el primer miembro de la ecuación como

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

Puesto que la adición es conmutativa y asociativa, podemos reacomodar los términos en el segundo miembro para tener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Al volver a escribir el segundo miembro aplicando la notación sigma obtenemos la propiedad 1. La propiedad 2 se demuestra de manera similar. Para demostrar la propiedad 3, usamos la propiedad distributiva:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$ ■

11.1 Ejercicios

1–10 ■ Determine los primeros cuatro términos y el centésimo término de la sucesión.

1. $a_n = n + 1$

2. $a_n = 2n + 3$

3. $a_n = \frac{1}{n+1}$

4. $a_n = n^2 + 1$

5. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

6. $a_n = \frac{1}{n^2}$

7. $a_n = 1 + (-1)^n$

8. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$

9. $a_n = n^n$

10. $a_n = 3$

11–16 ■ Calcule los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente.

11. $a_n = 2(a_{n-1} - 2)$ y $a_1 = 3$

12. $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ y $a_1 = -8$

13. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ y $a_1 = 1$

14. $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$ y $a_1 = 1$

15. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 2$

16. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ y $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

17–22 ■ Por medio de una calculadora para graficar ejecute lo siguiente.

a) Determine el décimo término de la sucesión.

b) Grafique los primeros 10 términos de la sucesión.

17. $a_n = 4n + 3$

18. $a_n = n^2 + n$

19. $a_n = \dfrac{12}{n}$

20. $a_n = 4 - 2(-1)^n$

21. $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$ y $a_1 = 2$

22. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 3$

23–30 ■ Determine el n-ésimo término de la sucesión cuyos primeros términos se proporcionan.

23. $2, 4, 8, 16, \ldots$

24. $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

25. $1, 4, 7, 10, \ldots$

26. $5, -25, 125, -625, \ldots$

27. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$

28. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

29. $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$

30. $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$

31–34 ■ Calcule las primeras seis sumas parciales $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ de la sucesión.

31. $1, 3, 5, 7, \ldots$

32. $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

33. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, \dfrac{1}{3^4}, \ldots$

34. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

35–38 ■ Calcule las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión a_n.

35. $a_n = \dfrac{2}{3^n}$

36. $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

37. $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

38. $a_n = \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ [*Sugerencia*: aplique una propiedad de los logaritmos para expresar el n-ésimo término como una diferencia.]

39–46 ■ Calcule la suma.

39. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k$

40. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2$

41. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}$

42. $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} (-1)^j$

43. $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} [1 + (-1)^i]$

44. $\displaystyle\sum_{i=4}^{12} 10$

45. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}$

46. $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} i2^i$

47–52 ■ Mediante una calculadora para graficar evalúe las sumas.

47. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$

48. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

49. $\displaystyle\sum_{j=7}^{20} j^2(1 + j)$

50. $\displaystyle\sum_{j=5}^{15} \frac{1}{j^2 + 1}$

51. $\displaystyle\sum_{n=0}^{22} (-1)^n 2n$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^n}{n}$

53–58 ■ Escriba la suma sin usar la notación sigma.

53. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$

54. $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{2i - 1}{2i + 1}$

55. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \sqrt{k + 4}$

56. $\displaystyle\sum_{k=6}^{9} k(k + 3)$

57. $\displaystyle\sum_{k=3}^{100} x^k$

58. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x^j$

59–66 ■ Escriba la suma mediante la notación sigma.

59. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

60. $2 + 4 + 6 + \cdots + 20$

61. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

62. $\dfrac{1}{2\ln 2} - \dfrac{1}{3\ln 3} + \dfrac{1}{4\ln 4} - \dfrac{1}{5\ln 5} + \cdots + \dfrac{1}{100\ln 100}$

63. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{999\cdot 1000}$

64. $\dfrac{\sqrt{1}}{1^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

65. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100}$

66. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \cdots - 100x^{99}$

67. Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2\sqrt{2}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \ldots$$

[*Sugerencia*: escriba cada uno de los términos como una potencia de 2.]

68. Defina la sucesión

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}\right)$$

Utilice el comando TABLE de una calculadora para graficar con el fin de determinar los primeros 10 términos de esta sucesión. Compare con la sucesión de Fibonacci F_n.

Aplicaciones

69. Interés compuesto Julio deposita 2000 dólares en una cuenta de ahorros que paga un interés de 2.4% al año, com-

11.2 Sucesiones aritméticas

En esta sección se trata un tipo especial de sucesión, llamada sucesión aritmética.

Sucesiones aritméticas

Quizá la manera más sencilla de generar una sucesión es empezar con un número a y añadirle una constante fija d, una y otra vez.

Definición de una sucesión aritmética

Una sucesión aritmética es una sucesión de la forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$$

El número a es el **primer término**, y d es la **diferencia común** de la sucesión. El **n-ésimo término** de una sucesión aritmética está dado por

$$a_n = a + (n - 1)d$$

El número d se llama diferencia común porque cualquier par de términos consecutivos de una sucesión aritmética tiene una diferencia de d.

Ejemplo 1 Sucesiones aritméticas

a) Si $a = 2$ y $d = 3$, entonces tenemos la sucesión aritmética

$$2, 2 + 3, 2 + 6, 2 + 9, \ldots$$

o bien, $$2, 5, 8, 11, \ldots$$

La diferencia de dos términos consecutivos cualquiera de esta sucesión es $d = 3$. El n-ésimo término es $a_n = 2 + 3(n - 1)$.

b) Considere la sucesión aritmética

$$9, 4, -1, -6, -11, \ldots$$

En este caso, la diferencia común es $d = -5$. Los términos de una sucesión aritmética disminuyen si la diferencia común es negativa. El n-ésimo término es $a_n = 9 - 5(n - 1)$.

c) La gráfica de la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2(n - 1)$ se muestra en la figura 1. Observe que los puntos de la gráfica quedan en la recta de pendiente $d = 2$.

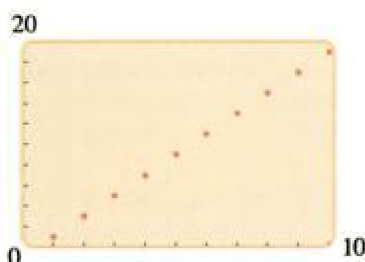


Figura 1

■

Matemáticas en el mundo moderno

División justa de bienes

Dividir un bien en forma justa entre una cierta cantidad de personas es de gran interés para los matemáticos. Entre los problemas de esta naturaleza se encuentran dividir el presupuesto nacional, tierras en disputa o los bienes en los casos de divorcio. En 1994, Brams y Taylor encontraron un camino matemático para dividir en forma justa las cosas. Su solución se ha aplicado a los problemas de división en la ciencia política, procedimientos legales y otras áreas. Para entender el problema, considere el ejemplo siguiente. Suponga que las personas A y B quieren dividir justamente una propiedad entre ellos. Dividir *justamente* significa que tanto A como B deben quedar satisfechos con el resultado de la división. Solución: A tiene que llegar a dividir la propiedad en dos partes, y luego B tiene que llegar a elegir la parte que quiere. Puesto que A y B tomaron parte en el proceso de división, cada uno debe estar satisfecho. La situación se vuelve más complicada cuando son tres o más personas, y es aquí donde entran los matemáticos. Dividir las cosas en forma justa requiere mucho más que sólo cortar las cosas a la mitad; se tiene que tomar en cuenta el *valor relativo* que cada persona da a la cosa que va a ser dividida. Una de las historias que aparecen en la Biblia ilustra con claridad estas situaciones: dos mujeres se presentan ante el rey Salomón. Cada una afirmaba ser la madre de un niño recién nacido. La solución del rey Salomón fue ¡dividir el niño a la mitad! La madre real, quien valoraba al niño más que nadie, inmediatamente desistió de sus afirmaciones con el fin de salvar la vida del niño.

Las soluciones matemáticas para los problemas de la división justa se han aplicado recientemente en un tratado internacional, la Convention on the Law of the Sea. Si un país quiere sacar provecho de una parte del fondo del mar,

(continúa)

Una sucesión aritmética está definida por completo con el primer término a y la diferencia común d. Por lo tanto, si conocemos los dos primeros términos de una sucesión aritmética, entonces podemos encontrar una fórmula para el n-ésimo término, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Determinación de términos de una sucesión aritmética

Determine los primeros seis términos y el término número 300 de la sucesión aritmética.

$$13, 7, \ldots$$

Solución Puesto que el primer término es 13, tenemos que $a = 13$. La diferencia común es $d = 7 - 13 = -6$. Por lo tanto, el n-ésimo término de la sucesión es

$$a_n = 13 - 6(n - 1)$$

A partir de lo anterior encontramos los primeros seis términos:

$$13, 7, 1, -5, -11, -17, \ldots$$

El tricentésimo término es $a_{300} = 13 - 6(299) = -1781$. ■

En el ejemplo siguiente se muestra que una sucesión aritmética queda definida del todo por *dos* términos *cualesquiera*.

Ejemplo 3 Determinación de los términos de una sucesión aritmética



El término décimoprimero de una sucesión aritmética es 52, y el término décimonoveno es 92. Calcule el término milésimo.

Solución Para determinar el n-ésimo término de esta sucesión es necesario encontrar a y d de la fórmula

$$a_n = a + (n - 1)d$$

A partir de esta fórmula tenemos

$$a_{11} = a + (11 - 1)d = a + 10d$$
$$a_{19} = a + (19 - 1)d = a + 18d$$

Puesto que $a_{11} = 52$ y $a_{19} = 92$, planteamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 52 = a + 10d \\ 92 = a + 18d \end{cases}$$

Al resolver el sistema y determinar a y d, obtenemos $a = 2$ y $d = 5$. (Compruébelo.) Por lo tanto, el n-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 2 + 5(n - 1)$$

El milésimo término es $a_{1000} = 2 + 5(999) = 4997$. ■

Sumas parciales de sucesiones aritméticas

Suponga que queremos hallar la suma de los números $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

Cuando el famoso matemático C. F. Gauss era un escolar, su maestro planteó este problema a la clase, con lo cual esperaba que los mantendría ocupados un buen tiempo. Pero Gauss respondió casi de inmediato. Su idea fue la siguiente: puesto que

Ejemplo 4 Determinación de una suma parcial de una sucesión aritmética

Calcule la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

Solución Por lo que se refiere a esta sucesión aritmética, $a = 3$ y $d = 4$. Si aplicamos la fórmula 1 para la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$S_{40} = \tfrac{40}{2}[2(3) + (40 - 1)4] = 20(6 + 156) = 3240$$ ■

Ejemplo 5 Determinación de una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la suma de los primeros 50 números impares.

Solución Los números impares forman una sucesión aritmética con $a = 1$ y $d = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, de modo que el quincuagésimo número impar es $a_{50} = 2(50) - 1 = 99$. Al sustituir en la fórmula 2 de la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$S_{50} = 50\left(\frac{a + a_{50}}{2}\right) = 50\left(\frac{1 + 99}{2}\right) = 50 \cdot 50 = 2500$$ ■



Ejemplo 6 Determinación de la capacidad de asientos en un auditorio



Un auditorio tiene 50 filas de asientos con 30 lugares en la primera fila, 32 en la segunda, 34 en la tercera, y así sucesivamente. Calcule la cantidad total de asientos.

Solución La cantidad de asientos en las filas forman una sucesión aritmética con $a = 30$ y $d = 2$. Puesto que hay 50 filas, la cantidad total de asientos es la suma

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}[2(30) + 49(2)] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= 3950$$

Por lo tanto, el auditorio tiene 3950 asientos. ■

Ejemplo 7 Determinación del número de términos en una suma parcial

¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 5, 7, 9, . . . se tienen que sumar para tener 572?

Solución Se nos pide encontrar n cuando $S_n = 572$. Al sustituir $a = 5$, $d = 2$ y $S_n = 572$ en la fórmula 1 de la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$572 = \frac{n}{2}[2 \cdot 5 + (n - 1)2] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$572 = 5n + n(n - 1)$$
$$0 = n^2 + 4n - 572$$
$$0 = (n - 22)(n + 26)$$

Esto da $n = 22$ o $n = -26$. Pero como n es el *número* de términos en la suma parcial, debemos tener entonces $n = 22$. ■

Aplicaciones

57. Depreciación El valor de compra de una computadora de oficina es 12 500 dólares. Su depreciación anual es 1875 dólares. Encuentre el valor de la computadora después de 6 años.

58. Postes apilados Los postes para teléfono se almacenan apilados con 25 postes en la primera capa, 24 en la segunda y así sucesivamente. Si hay doce capas, ¿cuantos postes para teléfono hay apilados?



59. Incrementos al salario Un hombre obtiene un empleo con un salario de 30 000 dólares al año. Le prometieron 2300 dólares de aumento anual en los años siguientes. Calcule el total de lo ganado en un periodo de 10 años.

60. Autocinema Un autocinema tiene espacio para 20 automóviles en la primera fila de estacionamiento, para 22 en la segunda, para 24 en la tercera y así sucesivamente. Si hay 21 filas en el autocinema, calcule la cantidad de automóviles que pueden estacionarse.

61. Lugares en el teatro Un arquitecto diseña un teatro con 15 asientos en la primera fila, 18 en la segunda, 21 en la tercera y así sucesivamente. Si el teatro va a tener una capacidad de 870, ¿cuántas filas debe considerar el arquitecto en su diseño?

62. Caída de una pelota Cuando se deja caer libremente un objeto cerca de la superficie terrestre, la fuerza de la gravedad es tal que el objeto cae a 16 pies en el primer segundo, a 48 pies en el siguiente segundo, a 80 pies en el siguiente segundo y así sucesivamente.

a) Encuentre la distancia total que la pelota recorre en 6 s.

b) Determine una fórmula de la distancia total que la pelota recorre en n segundos.

63. Los doce días de la época de Navidad En la tan bien conocida canción "The Twelve Days of Christmas", una persona le da a su amada k regalos en el k-ésimo día durante cada uno de los doce días de la época de Navidad. Asimismo, la persona da otra vez regalos idénticos a los ya entregados en cada día posterior. Por lo tanto, en el día 12, la amada recibe un regalo por el primer día, dos regalos por el segundo día, tres regalos por el tercer día y así sucesivamente. Demuestre que la cantidad de regalos recibida en el decimosegundo día es una suma parcial de una sucesión aritmética. Calcule la suma.

Descubrimiento • Debate

64. Media aritmética La **media aritmética** o promedio de dos números a y b es

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Observe que m es la misma distancia desde a como desde b, de modo que a, m, b es una sucesión aritmética. En general, si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ están igualmente separadas entre a y b de modo que

$$a, m_1, m_2, \ldots, m_k, b$$

es una sucesión aritmética, entonces $m_1, m_2, \ldots, m_k$ se llaman k medias aritméticas entre a y b.

a) Inserte dos medias aritméticas entre 10 y 18.

b) Inserte tres medias aritméticas entre 10 y 18

c) Suponga que un médico necesita incrementar la dosis de un cierto medicamento para un paciente. Necesita pasar de 100 mg a 300 mg por día, repartidos en cinco pasos iguales. ¿Cuántas medias aritméticas tiene que insertar entre 100 y 300 para obtener la progresión de dosis diaria, y cuáles son esas medias?

11.3 Sucesiones geométricas

En esta sección estudiamos las sucesiones geométricas. Este tipo de sucesiones se presenta a menudo en aplicaciones de finanzas, crecimiento de la población y otros campos.

Sucesiones geométricas

Recuerde que una sucesión aritmética se genera cuando añadimos repetidamente un número d a un término inicial a. Una sucesión *geométrica* se genera cuando empezamos con un número a y *multiplicamos* en forma repetida por una constante r, no cero y fija.

Definición de sucesión geométrica

Una **sucesión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

El número a es el **primer término** y r es la **razón común** de la sucesión. El **n-ésimo término** de una sucesión geométrica lo da

$$a_n = ar^{n-1}$$

El número r se llama razón común porque la proporción de dos términos consecutivos cualquiera de la sucesión es r.

Ejemplo 1 Sucesiones geométricas



a) Si $a = 3$ y $r = 2$, entonces tenemos la sucesión geométrica

$$3, \quad 3 \cdot 2, \quad 3 \cdot 2^2, \quad 3 \cdot 2^3, \quad 3 \cdot 2^4, \quad \ldots$$

o bien $$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

Observe que la razón de dos términos consecutivos cualquiera es $r = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 3(2)^{n-1}$.

b) La sucesión

$$2, -10, 50, -250, 1250, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 2$ y $r = -5$. Cuando r es negativa, los términos de la sucesión tienen signos alternados. El n-ésimo término es $a_n = 2(-5)^{n-1}$.

c) La sucesión

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{3}$. El n-ésimo término es $a_n = 1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

d) La gráfica de la sucesión geométrica $a_n = \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1}$ se muestra en la figura 1. Obsérvese que los puntos de la gráfica quedan en la gráfica de la función exponencial $y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-1}$.



Figura 1

Si $0 < r < 1$, entonces los términos de la sucesión geométrica ar^{n-1} disminuye, pero si $r > 1$, entonces los términos se incrementan. (¿Qué sucede si $r = 1$?) ■

Las sucesiones geométricas se presentan en forma natural. He aquí un ejemplo simple. Suponga que una pelota es tan elástica que cuando se deja caer rebota un tercio de la distancia desde donde cayó. Si esta pelota se deja caer desde una altura de 2 m, entonces rebota a una altura de $2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ m. En un segundo rebote, llega a una altura de $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ m, y así sucesivamente (véase la figura 2). Por lo tanto, la altura h_n que la pelota alcanza en su n-ésimo rebote está dada por la sucesión geométrica

$$h_n = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

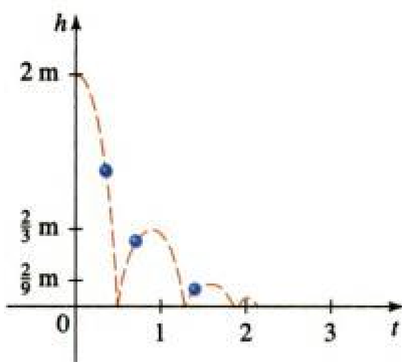


Figura 2

Se puede determinar el n-ésimo término de una sucesión geométrica si conocemos dos términos cualquiera, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Para encontrar una fórmula para S_n, multiplicamos S_n por r y restamos de S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \\ rS_n &= \quad\;\, ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n \end{aligned}$$

Entonces,

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

Este resultado se resume en el siguiente recuadro.

Sumas parciales de una sucesión geométrica

En el caso de la sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$, la ***n*-ésima suma parcial**

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (r \neq 1)$$

se obtiene mediante

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Ejemplo 4 Determinación de una suma parcial de una sucesión geométrica

Calcule la suma de los primeros cinco términos de la sucesión geométrica

$$1, 0.7, 0.49, 0.343, \ldots$$

Solución La suma requerida es la suma de los primeros cinco términos de una sucesión geométrica en la que $a = 1$ y $r = 0.7$. Si usamos la fórmula de S_n con $n = 5$, obtenemos

$$S_5 = 1 \cdot \frac{1 - (0.7)^5}{1 - 0.7} = 2.7731$$

Por lo tanto, la suma de los primeros cinco términos de esta sucesión es 2.7731 ■

Ejemplo 5 Determinación de una suma parcial de una sucesión geométrica



Calcule la suma $\sum_{k=1}^{5} 7\left(-\frac{2}{3}\right)^k$.

Solución La suma dada es la quinta suma parcial de una sucesión geométrica en donde $a = 7\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{3}$ y razón común $r = -\frac{2}{3}$. Por consiguiente, de acuerdo con la fórmula de S_n, tenemos

$$S_5 = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 + \frac{32}{243}}{\frac{5}{3}} = -\frac{770}{243}$$ ■

¿Qué es una serie infinita?

Una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$